RANGO (con determinantes)

Halla el rango de la matriz A dependiendo del valor del parámetro:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & m \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} m & -3 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 3 & -1 & m \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & k & 1 & 2 \\ k & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & m & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & n \end{bmatrix}$

e) $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 3 \\ 1 & a & 1 & 3 \\ 1 & 1 & a & a+2 \end{bmatrix}$

f) $A = \begin{bmatrix} 2p-1 & 3p & p-2 & 6 \\ 2p+1 & p & 2p+1 & 2 \\ 4p-1 & 3p & 3p-2 & 1 \end{bmatrix}$

g) $A = \begin{pmatrix} a+1 & a-1 & -(a+1) & 2 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ a+1 & 2a-1 & a-1 & 1 \end{pmatrix}$

SOLUCIONES

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & m \end{bmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & m \end{vmatrix} = -3m + 12; \quad -3m + 12 = 0 \rightarrow m = 4$

Si m $\neq$ 4, entonces ran (A) = 3.

Si m = 4, entonces ran (A) = 0, porque $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$

b) $A = \begin{pmatrix} m & -3 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 3 & -1 & m \end{pmatrix}$; $\begin{vmatrix} m & -3 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 3 & -1 & m \end{vmatrix} = m^3 + m - 10; \quad m^3 + m - 10 = 0 \rightarrow m = 2$

Si m $\neq$ 2, entonces ran (A) = 3

Si m = 2, entonces $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$, por lo tanto **ran (A) = 2**

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & k & 1 & 2 \\ k & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{vmatrix} = -k^3 + 3k - 2; \quad -k^3 + 3k - 2 = 0 \rightarrow k = 1(doble), k = -2$ *

Si $k \neq 1 \quad y \quad k \neq -2$**, entonces ran (A) = 3**

Si k = 1, entonces $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y **ran (A) = 2**, porque $f_3 = f_1$.

Si k=-2, entonces:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0(\text{ya estaba hecho en}\ *)$; $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

y por lo tanto **ran (A) = 3.**

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & m & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & n \end{bmatrix}$; $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$; $\begin{vmatrix} 1 & m & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & n \end{vmatrix} = 4n + m - 2mn - 5$

Si 4n + m –2nm – 5 $\neq$ 0, ran (A) = 3
Si 4n + m –2nm – 5 = 0, ran (A) = 2

e) $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 3 \\ 1 & a & 1 & 3 \\ 1 & 1 & a & a+2 \end{bmatrix}$; $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - 3a + 2; \quad a^3 - 3a + 2 = 0 \rightarrow a = 1(doble)\ y\ a = -2$ *

Si $a \neq 1\ y\ a \neq -2$**, entonces ran (A) = 3.**

Si a = 1, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ las tres filas son iguales y **ran (A) = 1**.

Si a = -2, A = $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$; $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$ y ya hemos visto en * que $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$,

hallamos, ahora, el otro menor de orden tres: $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, luego **ran (A) = 3**

f) A = $\begin{bmatrix} 2p-1 & 3p & p-2 & 6 \\ 2p+1 & p & 2p+1 & 2 \\ 4p-1 & 3p & 3p-2 & 1 \end{bmatrix}$; $\begin{vmatrix} 2p-1 & 3p & p-2 \\ 2p+1 & p & 2p+1 \\ 4p-1 & 3p & 3p-2 \end{vmatrix} \begin{matrix} f_1 - f_2 \\ f_3 - 2f_2 \end{matrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2p & -p-3 \\ 2p+1 & p & 2p+1 \\ -3 & p & -p-4 \end{vmatrix} =$

$c_3 - c_1 = \begin{vmatrix} -2 & 2p & -p-1 \\ 2p+1 & p & 0 \\ -3 & p & -p-1 \end{vmatrix} = p\begin{vmatrix} -2 & 2 & -p-1 \\ 2p+1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -p-1 \end{vmatrix} = p(-p-1)\begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2p+1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = p(p+1)2p$

Si $2p^2(p+1) = 0$ entonces p = 0 (doble) y p=-1.

Si $p \neq 0 \ y \ p \neq -1$ **entonces, ran (A) = 3.**

Si p = 0 entonces A = $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$; $\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad y \quad \begin{vmatrix} -1 & -2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, luego **ran (A) = 3.**

Si p = -1, A = $\begin{bmatrix} -3 & -3 & -3 & 6 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \\ -5 & -3 & -5 & 1 \end{bmatrix}$ $f_1 = 3f_2$ por tanto f_1 no sirve para el rango y **ran (A) = 2.**

g) A = $\begin{pmatrix} a+1 & a-1 & -(a+1) & 2 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ a+1 & 2a-1 & a-1 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{vmatrix} a+1 & a-1 & -a-1 \\ 0 & a & 1 \\ a+1 & 2a-1 & a-1 \end{vmatrix} f_1 - f_3 = \begin{vmatrix} 0 & -a & -2a \\ 0 & a & 1 \\ a+1 & 2a-1 & a-1 \end{vmatrix} =$

= $(a+1)(-a+2\cdot a^2)$; Si $(a+1)(-a+2\cdot a^2)$= entonces a = -1, a = 0 ó a = 1/2

Si $a \neq -1, a \neq 0 \ y \ a \neq \frac{1}{2}$, **ran(A) = 3**

Si a = -1, $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow$ **ran (A) = 3**

Si a = 0, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow$ **ran (A) = 3**

Si a = 1/2 , $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & -\frac{3}{2} & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{-1}{2} & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{vmatrix} \frac{-1}{2} & -\frac{3}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow$ **ran (A) = 3**

Por lo tanto para cualquier número a, ran (A) = 3.